IX Bienal de Matemática
Juazeiro do Norte 2019

Locais:
Universidade Regional do Cariri – URCA
campus Crajubar
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE
campus Juazeiro do Norte

De 25 a 28 de fevereiro de 2019
Juazeiro do Norte - CE

O PROBLEMA DO SITIANTE QUE RELACIONA O CÁLCULO COM O CONTEÚDO DO ENSINO BÁSICO

Silva, Diego Jonhathan Bezerra, e-mail[1]: diegoirineu32@gmail.com
Huanca, Roger Ruben Huaman, e-mail[2]: roger@uepb.edu.br

Universidade Estadual da Paraíba[1] - UEPB
Universidade Estadual da Paraíba[2] - UEPB

Resumo: *O presente trabalho traz a solução de um problema de natureza simples de duas maneiras distintas, primeiro com o Cálculo, conteúdo fundamental na Matemática Superior, em seguida utilizou-se os conhecimentos da Matemática Básica, mais precisamente o estudo dos máximos e mínimos de uma função polinomial do segundo grau. Ao decorrer do trabalho procura-se mostrar a beleza com que a Matemática Superior se apresenta, e o quão fascinante se torna um problema quando aplicado os conceitos de maneira eficiente. Também é explorado a beleza da Matemática Básica através da definição das coordenadas do vértice de uma parábola,* $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$*. Ainda é mostrado de maneira bastante sucinta algo sobre a história da definição formal de limite utilizando* ϵ *e* δ*. Por fim é discutido sobre a relação direta entre as coordenadas do vértice da parábola e o Cálculo Diferencial, além de ser proposto uma generalização para problemas com a mesma natureza do exposto no trabalho.*

Palavras-chave: *Resolução de Problemas, Cálculo, Abstração, Aprendizagem da Matemática.*

INTRODUÇÃO

Tanto o primeiro[1] e o segundo[2] autor deste artigo pensando no projeto PIBIC - 2019, vem discutindo algumas inquietações em relação ao Cálculo. Essas inquietações aumentaram principalmente depois que começamos a ver as aplicações e a sua importância. Isso se deve ao fato de que os cursos de Licenciatura em Matemática precisam formar professores preparados para trabalhar nos Ensinos Fundamental e Médio. Com isso, uma disciplina de Matemática ministrada nos cursos de Licenciatura deveria ser ministrada de uma forma diferente da dos outros cursos, como, por exemplo, Engenharia, Computação, etc. O conteúdo ministrado não necessariamente precisaria ser diferente mas, sim, a metodologia. Entretanto, a metodologia não deveria apenas produzir um método capaz de resolver problemas através de uma sequência de passos bem definidos. Ela deveria levar em consideração a produção de conhecimento, formando um ser pensante, crítico, produtivo e, principalmente criativo.

Desde a antiguidade, resolver problemas tem significado uma prática para aprender Matemática. O problema é definido por meio de uma tarefa ou atividade onde os estudantes não têm regra ou métodos, ou a percepção de que existe uma decisão correta, e o resultado é a sua aprendizagem quando se ensina através da Resolução de Problemas. Huanca (2014) enfatiza a importância de saber modelar problemas, condição necessária à formação do

[1] Cursa o terceiro período de Licenciatura em Matemática possuindo grande interesse pela a área pura, fascinado por Cálculo, inclusive é monitor da disciplina.
[2] Professor de Matemática há mais de quinze anos, inicialmente em Ensino Básico e atualmente em Ensino Superior, incluindo cursos de Licenciatura em Matemática e Curso de Pós-graduação.

aluno no sentido de que: ela desperta o interesse pela Matemática; leva a sentir sua beleza; melhora a busca pela construção de novos conceitos matemáticos; desenvolve a habilidade em resolver problemas; e estimula a criatividade. Para nós, a Resolução de Problemas significa fazer Matemática ao modelar o problema. A fundamentação teórica está construída a partir das discussões do problema do sitiante, ou seja, essas discussões foram feitas no contexto do conteúdo do Ensino Superior ligando-o ao conteúdo do Ensino Básico.

O PROBLEMA DO SITIANTE

O primeiro autor, pretende participar da seleção do projeto Iniciação Científica - PIBIC 2019, cujo projeto está em construção com foco no Cálculo como uma plataforma central da Matemática. O segundo autor deste artigo é o futuro orientador desse projeto. Para a construção do projeto, o segundo autor passou alguns textos em relação ao Cálculo e suas aplicações, assim como problemas instigantes. Um deles trazemos para este evento procurando apresentar a beleza da Matemática superior enxergada em um problema de natureza simples, que também pode ser resolvido pela Matemática do Ensino Básico.

A seguir apresentamos o problema do sitiante:

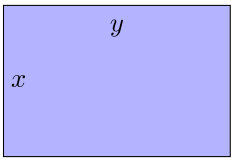
> Um sitiante dispõe de $400m$ de cerca de arame e gostaria de montar o maior galinheiro possível, de forma retangular. Como ele deve proceder?

Já trabalhando na construção do projeto de Iniciação Científica, o primeiro autor de início teve uma certa dificuldade para compreender o problema pelo fato de estar em contexto muito simples, pode-se dizer até que distante do que é visto durante as aulas de Cálculo. Após analisar a situação de um ponto de vista minucioso, foi visto a possibilidade de representar a área do galinheiro através da seguinte função de duas variáveis, já com um olhar de futuro pesquisador,

$$A(x, y) = x \cdot y$$

onde considerou-se x como sendo o comprimento do galinheiro e y sua largura. E foi representado da seguinte forma:

Figura 1 – Primeira representação do galinheiro



Fonte: Arquivo pessoal

Mas, mesmo conseguindo uma função ainda não era possível visualizar a solução do problema. Então continuando a análise dos poucos dados fornecidos pela questão, aproveitou-se o fato do galinheiro possuir formato retangular e que seu perímetro deve medir $400m$. Assim pelas propriedades do retângulo obteve-se a seguinte relação entre x e y,

$$2y + 2x = 400 \quad \Rightarrow \quad y = 200 - x$$

Desta forma foi possível expressar a área do galinheiro através de uma função de uma única variável, da seguinte maneira,

$$A(x) = x \cdot (200 - x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = 200x - x^2$$

A partir da nova função obtida, foi possível aplicar os conhecimentos de derivada, utilizando-os para encontrar o máximo da função. Pela construção de tal função esse resultado nos representaria a área máxima do galinheiro.

Foi então aplicado o teorema da derivada de primeira ordem. Foi calculado $A'(x)$,

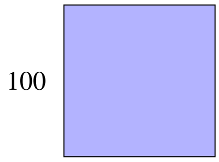
$$A'(x) = 200 - 2x$$

Em seguida foi igualado a derivada a zero e obteve-se $x = 100$ como sendo ponto crítico da curva. Assim foi representado a área máxima da seguinte maneira,

$$A_{\text{máx}} = \lim_{x \to 100} 200x - x^2$$

Por fim obteve-se a área máxima do galinheiro como sendo $10\ 000 m^2$. Então notou-se que a imagem pensada inicialmente, transformou-se em um quadrado de lado cem.

Figura 2 – Representação final do galinheiro



Fonte: Arquivo pessoal

A solução final do problema ficou da seguinte forma: para que o sitiante possa construir um galinheiro cujo perímetro messa $400m$, e a área seja a maior possível, ele deve construí-lo com formato de um quadrado de lado $100m$.

Ao modelar o problema o primeiro autor sentiu a beleza do Cálculo em um problema aparentemente simples onde pudemos trabalhar os conceitos de limite e Diferenciação. Mas, quando foi mostrado a solução do problema ao segundo autor, ele questionou como a mesma questão poderia ser solucionada através da Matemática básica.

Então, a seguir foi necessário repensar a solução do problema. Notou-se que utilizando os conhecimentos de Ensino Médio para reelaborar a solução os passos permaneciam os mesmos até a elaboração da função que nos dava a área do galinheiro. Só a partir daí que mudou-se a abordagem. Ao invés de utilizar o Cálculo Diferencial foi feito o estudo do máximo da função através das coordenadas do vértice de uma parábola, que é fornecida pronta da seguinte maneira,

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Foi utilizado essa fórmula com as informações da função $A(x)$, e obteve-se

$$x_v = 100 \quad \text{e} \quad y_v = 10\ 000$$

onde o x_v representa o comprimento do galinheiro, e y_v sua área, que são exatamente os mesmos resultados alcançados através da bela Matemática superior.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Stewart (2001), após a invenção do Cálculo, no século XVII, seguiu-se um período de livre desenvolvimento do assunto no século XVIII. Matemáticos como os irmãos Bernoulli e Euler estavam ansiosos por explorar o poder do Cálculo, e exploraram audaciosamente as consequências dessa nova teoria Matemática sem grandes preocupações com a veracidade e a correção de suas provas.

O século XIX, ao contrário, foi a época do rigor na Matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto para fornecer definições cuidadosas e provas rigorosas. Cauchy partiu da ideia de limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d'Alembert, e tornou-a mais precisa. Sua definição de limite tem a seguinte forma: quando valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de tal forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, este último é chamado limite de todos os outros. Mas, quando Cauchy usava essa definição, em exemplos e provas, ele frequentemente empregava desigualdades delta-epsilon. Uma demonstração típica de Cauchy começa com: "Designando por δ e ϵ dois números muito pequenos". Ele usou ϵ devido a uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa erreur (STEWART, 2001).

Mais tarde o matemático Karl Weierstrass (1815-1897) estabeleceu a definição de limite exatamente como está abaixo:

Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para todo número $\epsilon > 0$, há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Ou ainda, se $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Em Stewart (2006) lemos que um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período de tempo. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento do futuro. Um sitiante através da derivada ou x_v pode querer aproveitar o máximo de seu terreno. Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada de uma antiderivada de f.

Agora, através da resolução do problema do sitiante apresentaremos o conteúdo do Ensino Básico apresentado por Lima et al. (2006a) no capítulo 6 "Funções Quadráticas", publicado no livro A Matemática do Ensino Médio - Volume 1. Esses autores neste capítulo inicialmente trazem definições e preliminares; discutem um problema muito antigo; a forma canônica do trinômio onde nos interessa para este artigo, além de apresentarem o gráfico e a propriedade notável da parábola.

Então, podemos falar segundo Lima et al. (2006a) sobre os máximos e mínimos de uma função polinomial do segundo grau. Considerando a função

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

de início podemos assegurar que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim se considerarmos $a > 0$, o menor valor que f pode assumir é quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

por outro lado, se considerarmos $a < 0$, temos que o maior valor que f pode assumir é quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

Desta forma desconsiderando o sinal de a podemos dizer que $f(x)$ tem ponto crítico (máximo ou mínimo), em $x = \frac{-b}{2a}$ e assume valor crítico em $f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$, temos então o ponto especial que chamamos de vértice da parábola,

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Este ponto possui grande importância no estudo de funções do segundo grau. De início ele nos informa qual o ponto de simetria da parábola[3]. Esta informação auxilia bastante no estudo de gráficos e de problemas contextualizados. Na física pode ocorrer modelagem de fenômenos através de tais equações, e, é este ponto notável que vai informar máximos e mínimos do fenômeno observado.

CONCLUSÕES

Após a resolução do problema surgiu a curiosidade se seria possível através do Cálculo elaborar uma generalização para problemas com a mesma natureza. Levantou-se a seguinte questão, qual a área máxima de um retângulo de perímetro k?

[3] Curva muito importante na Matemática, inclusive é o gráfico de funções polinomiais do segundo grau.

Concluiu-se então que, através dos procedimentos utilizados para solucionar o problema, é possível provar que a área máxima de um retângulo de perímetro k seria sempre expresso da seguinte forma, $A_{\text{máx}} = \left(\frac{k}{4}\right)^2$ e este retângulo sempre seria compactado em um quadrado de lado $\frac{k}{4}$.

Ainda foi proposto mostrar a relação direta entre as expressões do "x" e "y" vértice do gráfico de uma função polinomial do segundo grau para com o Cálculo Diferencial. Para fazer tal demonstração tomou-se a função, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e então encontramos sua primeira derivada, $f'(x) = 2ax + b$.

Após ser aplicado o teorema da derivada primeira, anulando-a e encontrando o ponto crítico da curva, obtemos exatamente a expressão do "x" vértice, ou seja $x_v = \frac{-b}{2a}$. Por fim foi aplicado o conceito do limite para encontrar o "y" vértice, utilizou-se o seguinte Cálculo, $y_v = \lim_{x \to \frac{-b}{2a}} ax^2 + bx + c$ após calcular este limite e a custa de algumas manipulações algébricas encontrou-se a expressão do "y" vértice, $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

REFERÊNCIAS

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de problemas e a Modelização Matemática no Processo de Ensino - Aprendizagem - Avaliação**: uma contribuição para a formação continuada do professor de Matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

LIMA, E. L. et al. Funções Quadráticas. *In:* LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 114 – 159.

LIMA, E. L. et al. Equações do Segundo Grau. *In:* LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 35 – 63.

LINTZ, R, G. **História da Matemática**. v.1. Campinas: Unicamp, 2007 (Coleção CLE, 45v)

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. Funções do Segundo Grau. *In:* SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática**: Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2003. p. 131 – 157.

STEWART, J. **Cálculo**. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsim Learning, 2001.

__________ . **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomsim Learning, 2006.

COMO CITAR ESTE ARTIGO?
SILVA, D. J. B.; HUANCA, R. R. H. O problema do sitiante que relaciona o Cálculo como conteúdo do Ensino Básico. In: IX Bienal de Matemática da SBM, 2019, Juazeiro do Norte, CE – 25 a 28 de fevereiro de 2019. Disponível em: <http://www.grupos.uepb.edu.br/gprpem/artigos/>. Acesso em: < inserir aqui a data em que você acessou o artigo>